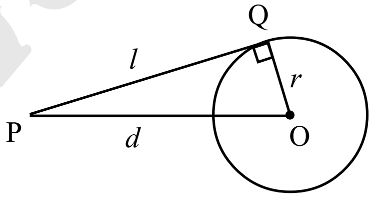
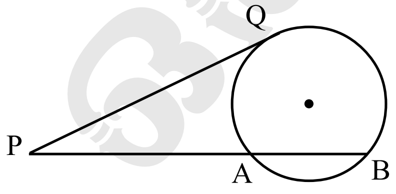
അധ്യായം 3

സ്പർശരേഖകൾ

ഈ അധ്യായത്തിലൂടെ

- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ വൃത്തത്തിലെ അഗ്രബിന്ദുവിൽകൂടി വരയ്ക്കുന്ന ലംബ രേഖ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയാണ്.
- വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ബാഹ്യബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ വരയ്ക്കാം; ഇവയുടെ നീളങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.
- ΔOPQ മട്ടത്രികോണമാകുന്നു.
  $d^2 = l^2 + r^2$ ആകുന്നു.



- ഒരു വൃത്തത്തിന് വരച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശരേഖയും സ്പർശബിന്ദുവിൽകൂടിയുള്ള ഒരു ഞാണും തമ്മിലുണ്ടാകുന്ന കോൺ ആ കോണിന്റെ മറുഭാഗത്തെ വൃത്തഖണ്ഡത്തിനെ കോണിന് തുല്യമായിരിക്കും.
- 

  PQ സ്പർശരേഖയായാൽ
  $PA \times PB = PQ^2$ ആകുന്നു.
- കോണിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളെയും സ്പർശിക്കത്തക്ക രീതിയിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാം.
- ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്ന് വശങ്ങളെയും സ്പർശിക്കത്തക്കരീതിയിൽ വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

പ്രവർത്തനം – 1

(a) ഇഷ്ടമുള്ള ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിൽ ഒരു സ്പർശരേഖ നിർമിക്കുക.

(b) ഈ സ്പർശരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായി വൃത്തത്തിന് മറ്റൊരു സ്പർശരേഖ നിർമിക്കുക.

പ്രവർത്തനം – 2

(a) ഇഷ്മുള്ള ആരത്തിൽ വൃത്തം വരച്ച് വൃത്തത്തിൽ സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത 2 സ്പർശരേഖ കൾ നിർമിക്കുക.

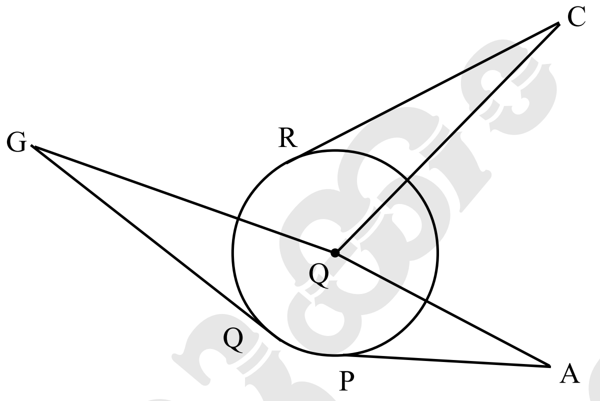
(a) ഈ സ്പർശരേഖകൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നും സ്പർശബിന്ദുവിലേക്കുള്ള നീളങ്ങൾ അളന്ന് പ്രത്യേകതകൾ കണ്ടെത്തുക.

(സൂചന: സമാന്തരമായ സ്പർശരേഖകൾ വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കണ മല്ലോ.

സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത സ്പർശരേഖകൾ നിർമിക്കുമ്പോൾ രേഖകൾ വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്ന പേപ്പറിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തന്നെ സംഗമിക്കുന്നു എന്ന് ഉറപ്പുവരത്തക്ക രീതിയിൽ സ്പർശബിന്ദുക്കൾ തിരഞ്ഞെടുക്കാവുന്നതാണ്.)

പ്രവർത്തനം 3

7 സെ.മീ. ആരമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും 25 സെ.മീ. അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖയുടെ നീളമെന്ത്?



ചിത്രത്തിൽ O വൃത്തകേന്ദ്രവും AP, BQ, CR എന്നിവ സ്പർശരേഖകളുമാണ്. OA = 15 സെ.മീ., AP = 9 സെ.മീ., OB = 13 സെ.മീ., CR = 16 സെ.മീ. ആയാൽ.

(a) വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര?

(b) BQ, OC ഇവയുടെ നീളങ്ങൾ കാണുക.

പ്രവർത്തനം 4

O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. വൃത്തത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. A യിലൂടെ ഒരു സ്പർശരേഖ നിർമിക്കുക. ഈ രേഖയിൽ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. PA = PB ആകത്തക്കരീതിയിൽ വൃത്തത്തിൽ B എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. PB യോജിപ്പിച്ച് $\angle OBP$ അളന്ന് കണ്ടെത്തുക.

(സൂചന: വൃത്തത്തിന്റെ ബഹിർഭാഗത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് 2 സ്പർശരേഖകൾ നിർമിക്കുന്നതിനുള്ള മാർഗമായി ഈ പ്രവർത്തനത്തെ കണക്കാക്കാം. ഈ രീതിയിൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനങ്ങൾ ചെയ്യാവുന്നതാണ്)

പ്രവർത്തനം 6

3 സെ.മീ. ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 5 സെ.മീ. അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് 2 സ്പർശരേഖകൾ നിർമിച്ച് അവയുടെ നീളം അളന്നെഴുതുക.

(സൂചന: 3 സെ.മീ. ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. വൃത്തത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി അതിൽകൂടി സ്പർശരേഖ നിർമിക്കുന്നു. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും 5 സെ.മീ. അകലെ

സ്പർശരേകയിൽ P എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. PA = PB ആകത്തക്കരീതിയിൽ വൃത്തത്തിൽ B എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു. PB യോജിപ്പിച്ച് രണ്ടാമത്തെ സ്പർശരേഖ വരയ്ക്കുന്നു)

പ്രവർത്തനം 7

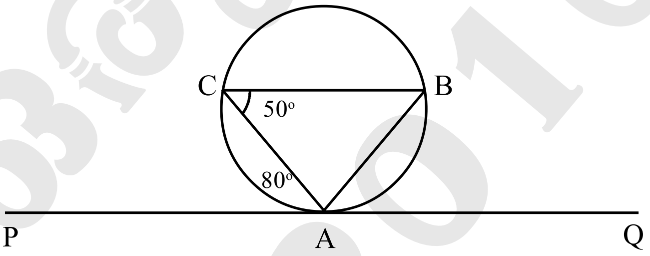
O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ AP സ്പർശരേഖയും P സ്പർശബിന്ദുവുമാണ്. $\angle BPQ = x$, ... $\angle PRQ$ കാണുന്നതിന് വേണ്ടി ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകൾ പൂർത്തീകരിക്കുക.

- $\angle OPB$ = ...
- $\angle OPQ$ = ...
- $\angle OQP$ = ...
- $\angle POQ$ = ...
- $\angle PRQ$ = ...

$\angle BPQ$, $\angle PRQ$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്ത്?

(സൂചന: ഈ പ്രവർത്തനം ചെയ്യുന്നതിനു മുൻപേ ചിത്രം വരച്ച് $\angle BPQ$, $\angle PRQ$ ഇവ അളന്നു നോക്കി അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കണം.)

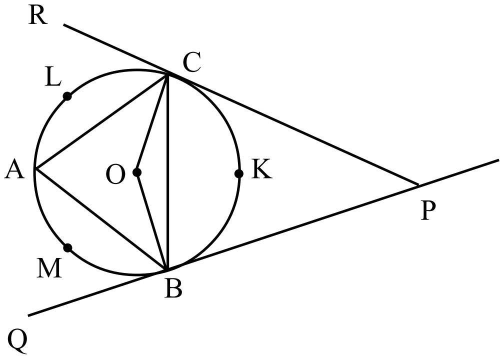
പ്രവർത്തനം 8



ചിത്രത്തിൽ PQ സ്പർശരേഖയും A സ്പർശബിന്ദുവുമാണ്. $\angle PAC = 80^\circ$ $\angle ACB = 50^\circ$ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. കോണുകളുടെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

- $\angle ABC$ = ...
- $\angle BAC$ = ...
- $\angle BAQ$ = ...

പ്രവർത്തനം 9



(a) ഈ ചിത്രത്തിൽ PQ, PR എന്നിവ സ്പർശരേഖകളും B, C ഇവ സ്പർശബിന്ദുക്കളുമാണ്. $\angle A = 50^\circ$ ആയാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവ കാണുക.

- $\angle PBC$ = ...
- $\angle PCB$ = ...
- $\angle BPC$ = ...
- $\angle BOC$ = ...
- $\angle PBC$ = ...
- $\angle OCB$ = ...

(b) മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ $\angle ABQ = 60^\circ$ എന്നുകൂടി തന്നാൽ ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്നവ കാണുക.

- $\angle ACB$
- $\angle AOC$ (OA യോജിപ്പിക്കുക)
- $\angle ACO$
- $\angle AOB$
- $\angle OBA$
- $\angle ABC$

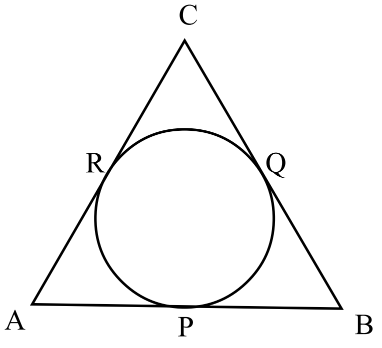
(c) ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോൺ എഴുതുക.

- ചാപം ACB
- ചാപം ABC
- ചാപം BAC
- ചാപം AKC
- ചാപം CLA
- ചാപം BMA

പ്രവർത്തനം – 10

ΔABC യുടെ അന്തർവൃത്തം AB, BC, AC എന്നീ വശങ്ങളെ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

AP = 3 സെ.മീ., BQ = 2.5 സെ.മീ., CR = 3.5 സെ.മീ. ആയാൽ AB, BC, AC ഇവ കാണുക.

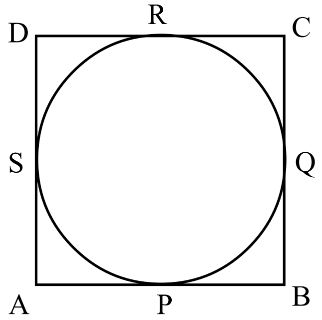


പ്രവർത്തനം – 11

ചിത്രം 10-ലെ ചിത്രത്തിൽ AB = 10 സെ.മീ., BC = 12 സെ.മീ., AC = 15 സെ.മീ. ആയാൽ AP, BQ, CR ഇവ കാണുക.

(സൂചന: ഇവിടെ AP = x എന്നെടുത്താൽ BP = 10 – x, BQ = 10 – x, CQ = 2 + x, CR = 2 + x, AR = x എന്നിങ്ങനെ കിട്ടുമല്ലോ)

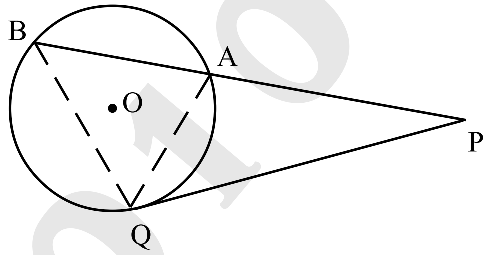
പ്രവർത്തനം – 12



ചതുർഭുജം ABCD യുടെ അന്തർവൃത്തം AB, BC, CD, AD എന്നീ വശങ്ങളെ P, Q, R, S എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. AP = 3 സെ.മീ., BQ = 4 സെ.മീ., CR = 3.5 സെ.മീ., DS = 2.5 സെ.മീ. ആയാൽ AB, BC, CD, AD എന്നിവ കണക്കാക്കുക. കൂടാതെ AB + CD = BC + AD എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(സൂചന: ഈ പ്രവർത്തനം അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കാവുന്ന ഏത് ചതുർഭുജത്തിനും ബാധകമാണെന്ന് ബോധ്യപ്പെടുത്തണം)

പ്രവർത്തനം – 13



ചിത്രത്തിൽ PQ സ്പർശരേഖയും O വൃത്തകേന്ദ്രവുമാണ്.

$\angle PQA = x^{o}$ ആയാൽ

- $\angle PBQ$ എത്ര?
- ΔPQA, ΔPBQ എന്നിവയുടെ പ്രത്യേകത എന്ത്?
- $PA \times PB = PQ^2$ എന്ന് തെളയിക്കുക.
- PQ = 6 സെ.മീ., PB = 12 സെ.മീ. ആയാൽ AB എത്ര?

പ്രവർത്തനം – 14

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ബഹിർഭാഗത്തുള്ള ബിന്ദുവാണ് P. P യിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് വരച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശരേഖയ്ക്ക് 8 സെ.മീ. നീളമുണ്ട്. P യിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം 4 സെ.മീ. ആയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എന്ത്?

(സൂചന: വ്യാസം കണ്ടുപിടിച്ച് ആരം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ ആരം r എന്നെടുത്ത് ദ്വിമാനസമവാക്യത്തിന്റെ സഹായത്തോടെയും ഉത്തരത്തിലെത്താം.)

പ്രവർത്തനം – 15

4 സെ.മീ. ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 9 സെ.മീ. അകലെ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്ക് 2 സ്പർശരേഖകൾ നിർമിച്ച് അവയുടെ നീളം അളന്നെഴുതുക.

(സൂചന: ഈ പ്രവർത്തനം, പ്രവർത്തനം 5 ൽ സൂചിപ്പിച്ചതുപോലെയും ചെയ്യാവുന്നതാണ്)

കുറിപ്പ്: ഇതുപോലുള്ള വേറെയും പ്രവർത്തനങ്ങൾ നൽകി സ്പർശരേഖ നിർമിതി ഉറപ്പിക്കേണ്ടതാണ്.

പ്രവർത്തനം – 16

$\angle ABC = 60^{o}$ ആകത്തക്ക രീതിയിൽ കോൺ വരയ്ക്കുക.

- BA, BC എന്നീ വശങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ എവിടെയായിരിക്കും?
- B യിൽ നിന്നും 6 സെ.മീ. അകലെ കേന്ദ്രമാകത്തക്കരീതിയിൽ BA, BC എന്നീ വശങ്ങളെ സ്പർശിച്ചുകൊണ്ട് വൃത്തം വരയ്ക്കുക.
- വൃത്തത്തിന്റെ ആരം അളന്നെഴുതുക.
- കേന്ദ്രത്തിന്റെ സ്ഥാനം മാറ്റി മുകളിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ വേറെയും വൃത്തങ്ങൾ നിർമിക്കുക.

പ്രവർത്തനം – 17

- 6 സെ.മീ. സമഭുജത്രികോണം വരച്ച് അന്തർവൃത്തം നിർമിക്കുക.
- പാദവശങ്ങൾ 6 സെ.മീ., 8 സെ.മീ. വരുന്ന മട്ടത്രികോമം നിർമിച്ച് അന്തർവൃത്തം നിർമിക്കുക.
- AB = 6 സെ.മീ., BC = 8 സെ.മീ. ത്രികോണം ABC നിർമിച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
- PQ = 7 സെ.മീ., PR = 6 സെ.മീ., $\angle P = 50^{o}$, ത്രികോണം PQR വരച്ച് അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
- PQ = 6 സെ.മീ., $\angle P = 70^{o}$, $\angle P = 50^{o}$ ത്രികോണം നിർമിച്ച് അന്തർവൃത്തം നിർമിക്കുക.

(സൂചന: മുകളിൽ വരയ്ക്കുന്ന അന്തർവൃത്തങ്ങളുടെ ആരം അളന്ന് കണ്ടെത്തേണ്ടതാണ്)

ഒരുക്കം 2010

സ്പർശരേഖകൾ – മൂല്യനിർണയം

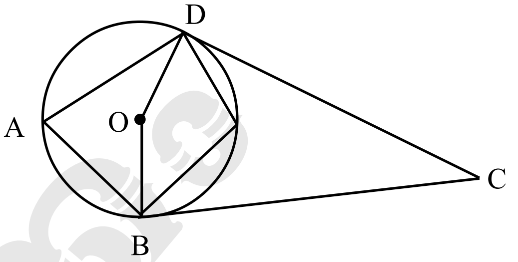
ആകെ സമയം: 30 മിനിറ്റ്

സ്കോർ: 15

---

1. ഇഷ്ടമുള്ള ആരത്തിൽ വൃത്തം വരച്ച് അതിന് സ്പർശരേഖ നിർമിക്കുക. (2)

2. ചിത്രത്തിലെ CB, CD ഇവ സ്പർശരേഖകളും O വൃത്തകേന്ദ്രവുമാണ്.



$\angle BCD = 30^\circ$ ആയാൽ

(a) $\angle BOD$ എത്ര? ( )

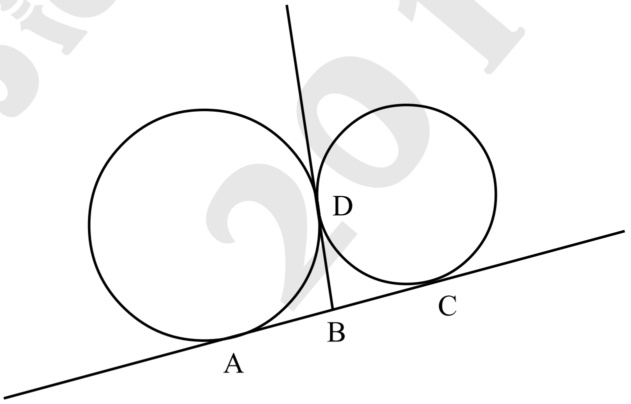
(b) $\angle BAD$ എത്ര? (½)

(c) $\angle BPD$ എത്ര? (½)

(d) ചാപം BAD യുടെ കേന്ദ്രകോൺ എത്ര? (½)

3. ΔABC യുടെ അന്തർവൃത്തം AB, BC, AC എന്നീ വശങ്ങളെ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. AB = 8 സെ.മീ., BC = 12 സെ.മീ., AC = 14 സെ.മീ. എങ്കിൽ AP, BQ, CR കാണുക. (3)

4. ചിത്രത്തിൽ AC, BD എന്നിവ രണ്ട് വൃത്തങ്ങളുടെയും പൊതുസ്പർശരേഖകളാണ്.



AC യുടെ മധ്യബിന്ദുവാണ് B എന്ന് തെളിയിക്കുക. (2)

5. 4 സെ.മീ. ആരമുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും 7 സെ.മീ. അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വൃത്തത്തിലേക്ക് രണ്ട് സ്പർശരേഖകൾ നിർമിക്കുക. അവയുടെ നീളം അളന്നെഴുതുക. (3)

6. PQ = 7 സെ.മീ., QR = 6.5 സെ.മീ., $\angle Q = 65^\circ$ ത്രികോണം നിർമിക്ക് അന്തർവൃത്തം വരച്ച് ആരം അളന്നെഴുതുകയ (3)

അധ്യായം 4

ദ്വിമാനസമവാക്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിലൂടെ

- ദ്വിമാനസമവാക്യം എന്ന ആശയം
- ദ്വിമാനസമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും നിർധാരണമൂല്യം കാണുന്നു.
- ദ്വിമാനസമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം കണ്ടെത്തുന്നു.
- വിവേചകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ മൂല്യങ്ങളുടെ സ്വഭാവം നിർണയിക്കുന്നു.
    - $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ $b^2 - 4ac$ ഒരു ന്യൂനസംഖ്യയായാൽ നിർധാരണ മൂല്യം ഉണ്ടാവില്ല. (രേഖീയസംഖ്യകൾക്ക് മൂല്യങ്ങളില്ല).
    - $b^2 - 4ac = 0$ ആയാൽ മൂല്യങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യമാകുന്നു. ആ മൂല്യം $\frac{-b}{2a}$ ആകുന്നു.
    - $b^2 - 4ac$ അധിസംഖ്യയായാൽ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. അവ $\frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- ഭാഷാവാക്യങ്ങളെ ബീജഗണിത വാക്യങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്ന പ്രവർത്തനം
    - തുടർച്ചയായ 2 എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ - $x_1\ x + 1$
    - തുടർച്ചയായ 2 ഒറ്റസംഖ്യകൾ/ഇരട്ടസംഖ്യകൾ - $x_1\ x + 2$
    - ഒരു സംഖ്യയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമവും - $x_1\ \frac{1}{x}$
    - തുക a ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ - $\frac{a}{2} + x, \frac{a}{2} - x$
    - വ്യത്യാസം b ആയ 2 സംഖ്യകൾ - $x + \frac{b}{2}, x - \frac{b}{2}$

പ്രവർത്തനം – 1

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും അക്ഷരങ്ങളുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്തുക.

a) • $x^2 = 25$ • $y^2 = 9$ • $a^2 = 16$

b) • $x^2 + 1 = 17$ • $y^2 - 2 = 47$ • $z^2 + 6 = 87$

c) • $2x^2 = 98$ • $3y^2 = 675$ • $4a^2 = 64$

d) • $2x^2 + 7 = 135$ • $3a^2 - 8 = 100$ • $5a^2 + 3 = 323$

ഒരുക്കം 2010

e) • $(x+2)^2 = 81$ • $(y-3)^2 = 100$ • $(z+4)^2 = 169$

f) • $(2x-3)^2 = 144$ • $(3x+2)^2 = 324$ • $(2x+1)^2 = 225$

പ്രവർത്തനം – 2

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്നും അക്ഷരങ്ങളുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്തുക.

a) $x^2 + 4x + 4 = 64$

b) $x^2 - 8x + 16 = 25$

c) $a^2 - 6a + 9 = 100$

(സൂചന: ഈ പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ സമചിഹ്നത്തിന്റെ ഇടതുഭാഗത്തുള്ളതെല്ലാം പൂർണവർഗങ്ങൾ ആണല്ലോ. അതിനാൽ ഇവ പൂർണവർഗരൂപത്തിലെഴുതി പ്രവർത്തനം 1 ലെ 'e' വിഭാഗത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ ചെയ്യാൻ കഴിയും)

പ്രവർത്തനം – 3

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിലെ കോളം I ലെ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളുടെ കൂടെ കൂട്ടേണ്ടുന്ന അനുയോജ്യമായ സംഖ്യ കോളം II ൽ നിന്നും കണ്ടെത്തി അതിന്റെ പൂർണവർഗം III-ാമത്തെ കോളത്തിൽ എഴുതുക.

I	II	III
$x^2 + 6x + 5$	6	$(x-2)^2$
$x^2 - 8x + 10$	9	$(x+3)^2$
$x^2 - 4x + 5$	-5	$(x-7)^2$
$x^2 + 10x + 30$	4	$(x-4)^2$
$x^2 - 14x + 40$	-1	$(x+5)^2$

പ്രവർത്തനം – 4

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന ബീജഗണിതവാചകങ്ങളുടെ കൂടെ അനുയോജ്യമായ പദങ്ങൾ കൂട്ടി അതിനെ പൂർണവർഗത്തിൽ എഴുതുക.

- $x^2 + 6x +$ ___ = $(x +$ ___ $)^2$
- $y^2 - 12y +$ ___ = $(x -$ ___ $)^2$
- $a^2 +$ ___ $+ 9$ = $(a +$ ___ $)^2$
- ___ $+ 8x + 16$ = $(x +$ ___ $)^2$

പ്രവർത്തനം – 5

ചുവടെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും അക്ഷരങ്ങളുടെ വില കാണുക.

- $x^2 + 4x = 45$
- $m^2 - 8m = 560$
- $a^2 - 6a = 55$
- $x^2 - 12m = 64$

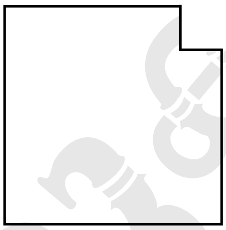
- $y^2 + 10y = 119$
- $3x^2 - 18m = 165$
- $2a^2 - 24a = 90$

(സൂചന: ഇവിടെ അവസാനം തന്നിരിക്കുന്ന 2 പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ രണ്ടാം 2-ാം കൃതികളുടെ ഗുണോത്തങ്ങൾ '1' ആകത്തക്കരീതിയിൽ അനുയോജ്യമായ സംഖ്യകൊണ്ട് ഹരിച്ച് അക്ഷരങ്ങളുടെ വിലകൾ (മൂല്യങ്ങൾ) കാണാവുന്നതാണ്)

പ്രവർത്തനം – 6

സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കാർഡ്ഷീറ്റിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്നും 3 സെ.മീ. വശമുള്ള ഒരു ചെറിയ സമചതുരം മുറിച്ചുമാറ്റുന്നു. ശേഷിച്ച ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണം 112 ചതുരശ്ര സെ.മീ. ആണ്. എങ്കിൽ കാർഡ്ഷീറ്റിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കും?

(സൂചന: സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു മൂലയിൽനിന്നും മറ്റൊരു സമചതുരം മുറിച്ചുമാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്ന രൂപം ഇങ്ങനെയായിരിക്കുമല്ലോ.



ഇതിനെ ഒരു സമചതുരവും 2 ദീർഘചതുരങ്ങളുമാക്കി മാറ്റി പ്രശ്നപരിഹാരം നടത്താവുന്നതാണ്.)

പ്രവർത്തനം – 7

$x^2 - 6x - 16 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുന്നതിനുവേണ്ടി ചെയ്ത പ്രവർത്തനത്തിന്റെ വിവിധഘട്ടങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ഘട്ടങ്ങൾ പൂർത്തീകരിച്ച് x ന്റെ വിലകൾ കാണുക.

$x^2 - 6x - 16$	=	0
$x^2 - 6x$	=	☐
$x^2 - 6x +$ ☐	=	☐ + ☐
$(x -$ ☐ $)^2$	=	☐
$x -$ ☐	=	☐ അല്ലെങ്കിൽ ☐
x	=	☐ അല്ലെങ്കിൽ ☐

പ്രവർത്തനം – 8

- തുടർച്ചയായ 2 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 63 ആയാൽ സംഖ്യകളേവ?
- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം വീതിയേക്കാൾ 8 സെ.മീ. കൂടുതലാണ്. വിസ്തീർണം 153 ചതുരശ്ര സെ.മീ. ആയാൽ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.
- ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിനേക്കാൾ 6 കുറവുമുള്ള മറ്റൊരു സംഖ്യയുടേയും ഗുണനഫലം 135 ആണ്. സംഖ്യയേത്?
- ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിൽനിന്നും സംഖ്യയുടെ 8 മടങ്ങ് കുറച്ചപ്പോൾ 33 കിട്ടി. സംഖ്യയേത്?

(സൂചന: വർഗം പൂർത്തീകരിച്ച് ഈ പ്രവർത്തനം എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യാവുന്നതാണ്)

പ്രവർത്തനം – 9

ചുവടെ തനനിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന രൂപത്തലേക്ക് മാറ്റി a, b, c ഇവയുടെ വിലകൾ കണ്ടെത്തുക.

- $2x^2 + 5x = 10$
- $x(x - 3) = 4$
- $5x(x + 2) = 6$
- $(2x - 1)^2 = 15$
- $x(x - 3) = 5(2x + 1)$
- $x + \frac{1}{x} = 2$
- $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 3$

പ്രവർത്തനം – 10

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ വിവേചക ന്യൂനസംഖ്യയായവ, പൂജ്യം ആയവ അധിസംഖ്യകളായവ എന്നിങ്ങനെ തരം തിരിച്ച് പട്ടികപ്പെടുത്തുക.

- $x^2 - 2x - 5 = 0$
- $2x^2 - 3x + 4 = 0$
- $x(x + 2) = 8$
- $x^2 + x + 1 = 0$
- $x^2 + 9 = 6x$
- $x^2 - x - 1 = 0$
- $4x^2 + 4x + 1 = 0$
- $x^2 + 5 = 0$
- $2x^2 - 1 = 0$

(സൂചന: വിവേചകം ന്യൂനസംഖ്യാ മൂല്യങ്ങളില്ലാത്തത് സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടാൽ $x^2 + 1 = 0$ എന്ന രീതിയുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതിയാൽ മതി.

വിവേചകം അധിസംഖ്യയായ (രണ്ട് വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ ഉള്ളവ) ദ്വിമാനസമവാക്യങ്ങൾ എഴുതാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടാൽ $x^2 - 4 = 0$ എന്ന രീതിയിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ എഴുതിയാൽ മതി.

ഇനിയുള്ള പ്രവർത്തനങ്ങൾ ദ്വിമാനസമവാക്യത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് ചെയ്ത് ഉത്തരം കണ്ടെത്താൻ ശ്രമിക്കാം.

ഒരുക്കം 2010

പ്രവർത്തനം – 11

- $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

(സൂചന: ഇത് വർഗം പൂർത്തീകരിച്ച് ചെയ്യുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നതായിരിക്കും)

പ്രവർത്തനം – 12

(a) ഒരു സംഖ്യയുടേയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക ആകുമോ? എന്തുകൊണ്ട്.

(b) ഈ തുക $\frac{10}{3}$ ആയാൽ സംഖ്യ ഏത്?

(സൂചന: ഒരു സംഖ്യയുടേയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുകയുടെ കേവലവില ഒരിക്കലും ഒന്നിൽ കുറവല്ല)

(c) ഒരു സംഖ്യയുടേയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും വ്യത്യാസം 3 ആണ്. എങ്കിൽ സംഖ്യ ഏത്?

(സൂചന: ഇവിടെ $3\frac{3}{4}$ എന്നത് $\frac{15}{4}$ എന്നാക്കി മാറ്റി ചെയ്യാവുന്നതാണ്)

പ്രവർത്തനം – 13

(a) തുക 16 ആയ രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 55 ആയാൽ സംഖ്യകളേവ?

(സൂചന: ഇവിടെ സംഖ്യകൾ $8 + x$, $8 - x$ എന്ന് സ്വീകരിക്കുന്നത് കൂടുതൽ സൗകര്യമായിരിക്കും അപ്പോൾ ഗുണനഫലം

$$(8 + x)(8 - x) = 55$$

$$64 - x^2 = 55$$

$$x^2 = 9$$ എന്നതിൽ നിന്ന് ഉത്തരത്തിലെത്തിച്ചേരാം)

(b) വ്യത്യാസം 8 ആയ രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 105 ആണ്. സംഖ്യകളേവ?

(സൂചന: ഇവിടെ സംഖ്യകൾ $x + 4, x - 4$ എന്നിങ്ങനെ എടുക്കുന്നത് സൗകര്യമാവും. അപ്പോൾ ഗുണനഫലം

$$(x + 4)(x - 4) = 105$$

$$x^2 - 16 = 105$$ എന്നതിൽ നിന്ന് ഉത്തരത്തിലെത്തിച്ചേരാം)

(c) രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ തുക 18 ആയാൽ അവയുടെ ഗുണനഫലം 90 ആകുമോ? ഉത്തരം സമർഥിക്കുക.

(സൂചന: $(9 + x)(9 - x) = 90$ എന്നതിലൂടെ ഉത്തരം സമർഥിക്കാം.

അല്ലെങ്കിൽ

വിവേചകം കണ്ടെത്തി ഉത്തരം സമർത്ഥിക്കാം

അല്ലെങ്കിൽ

തുക 18 ആയ രണ്ട് സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം പരമാവധി 81 ($9+9=18, 9\times9=81$) ആയിരിക്കും. ആയതിനാൽ ഗുണനഫലം 90 ആവില്ല)

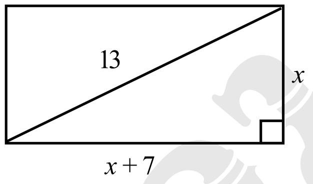
(d) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 48 സെ.മീ. അതിന്റെ വിസ്തീർണം 150 ചതുരശ്ര സെ.മീ. ആകുമോ? ഉത്തരം സമർഥിക്കുക.

(സൂചന: ചുറ്റളവ് 48 ആയ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയാൽ 24 കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ നീളം വീതി പരമാവധി 144 ആകുകയൊള്ളൂ)

പ്രവർത്തനം – 14

(a) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വീതിയേക്കാൾ 7 സെ.മീ. കൂടുതലാണ് നീളം. ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ നീളം 13 സെ.മീ. ആയാൽ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

(സൂചന: ചതുരത്തിന്റ നീളവും വീതിയും വികർണവും ചേർന്നാൽ മട്ടത്രികോണം ലഭിക്കുന്നു.



പൈഥഗോറസ് തത്വത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ x ന്റെ വില കണ്ടെത്താം)

(b) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ 3 മടങ്ങിനേക്കാൾ 3 സെ.മീ. കൂടുതലാണ് ലംബം. ലംബത്തിനേക്കാൾ 1 സെ.മീ. കൂടുതലാണ് കർണം.

- പാദം x ആയി പരിഗണിച്ച് ദ്വിമാനസമവാക്യം രൂപീകരിക്കുക.
- ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

പ്രവർത്തനം – 15

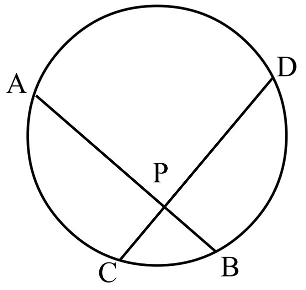
(a) 8, 14, 20, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് 1062?

(സൂചന: ഈ ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$= \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right) n$$

$= 3n^2 + 5n$ ആയിരിക്കുമല്ലോ. ഇതിൽ നിന്നും ദ്വിമാനസമവാക്യം രൂപീകരിക്കാം)

(b) ചിത്രത്തിൽ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AB = 17 സെ.മീ., PA = 9 സെ.മീ., CD = 18 സെ.മീ. എങ്കിൽ PC എത്ര?



(c) ചിത്രത്തിൽ PQ സ്പർശരേഖയും അതിന്റെ നീളം 12 സെ.മീ. ഉം ആണ്. AB = 10 സെ.മീ. ആണെങ്കിൽ PA എത്ര?

(d) $6x^2 - 11x + 3$ എന്ന പോളിനോമിയലിനെ രണ്ട് 1-ാം കൃതിയുള്ള പോളിനോമിയലുകളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക.

(e) 15 സെ.മീ. പാർശ്വോന്നതിയുള്ള കട്ടിയായ ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതല വിസ്തീർണം 864 ചതുരശ്ര സെ.മീ. ആണ്. എങ്കിൽ പാദവക്കിന്റെ നീളം എത്ര?

(f) (–2, 8) എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നും X അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരം 10 യൂണിറ്റ് ആയാൽ X അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദു ഏതായിരിക്കും?

(സൂചന: ഈ പ്രവർത്തനത്തിലെ എല്ലാ പ്രശ്നവും ദ്വിമാനസമവാക്യങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട മറ്റ് അധ്യായങ്ങളിലുള്ളവയാണ്)

പ്രവർത്തനം – 16

20 m/s വേഗതയിൽ ഒരു വസ്തുവിനെ മുകളിലൊട്ടെറിയുന്നു. $g = 10\ m/s^2$ ആയാൽ വസ്തു 15 മീറ്റർ മുകളിലെത്താൻ എത്ര സമയം എടുക്കും?

(സൂചന: വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, $s = ut - \frac{1}{2} gt^2$ എന്നതിൽ, u = 20, g = 10, s = 15 എന്നെടുത്ത് ദ്വിമാനസമവാക്യം രൂപീകരിക്കാം. ഇവിടെ t യ്ക്ക് 2 വില ലഭിക്കുന്നതിന്റെ യുക്തി ബോധ്യപ്പെടുത്തേണ്ടതാണ് - രണ്ട് വ്യത്യസ്ത സമയങ്ങളിൽ വസ്തു 15 മീറ്റർ മുകളിൽ ഉണ്ടായിരിക്കുമല്ലോ)

ഒരുക്കം 2010

ദ്വിമാനസമവാക്യങ്ങൾ – മൂല്യനിർണയം

ആകെ സമയം: 30 മിനിറ്റ്

സ്കോർ: 15

---

1. $(3x - 2)^2$ ആയാൽ

   (a) വിവേചകം കാണുക. (1)

   (b) സമവാക്യത്തിന്റെ മൂല്യം എന്ത്? (1)

2. തുക 12 ആയ 2 സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 35 ആണ്. സംഖ്യയേത് (2)

3. ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും വ്യത്യാസം $1\frac{1}{2}$ ആകുന്നു. സംഖ്യ യേത്? (3)

4. $x^2 - 8x - 33 = 0$ എന്ന സമവാക്യം നിർധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് വേണ്ടി ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഘട്ടങ്ങൾ പൂർത്തീകരിക്കുക.

   $x^2 - 8x = \square$

   $x^2 - 8x + \square = \square$

   $(x - \square)^2 = \square$

   $x - \square = \square$ അല്ലെങ്കിൽ $\square$

   $x = \square$ അല്ലെങ്കിൽ $\square$ (2)

5. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പാദവശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങിനേക്കാൾ 2 സെ.മീ. കൂടുതലാണ് ലംബവശം. ലംബവശത്തിനേക്കാൾ 1 സെ.മീ. കൂടുതലാണ് കർണവശം. ഏറ്റവും ചെറിയ വശം x ആയി പരിഗണിച്ച് ദ്വിമാനസമവാക്യം രൂപീകരിച്ച് മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കാണുക. (3)

6. 6, 10, 16, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ എത്ര പദങ്ങളുടെ തുകയാണ് 1056. (3)

ഒരുക്കം 2010